

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln x$.

5p a) Să se arate că $f(1) - f'(1) = 1$.

5p b) Să se determine punctul de extrem al funcției f .

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x}{x}$

2. Se consideră integralele $I = \int_0^1 \frac{e^x}{x+1} dx$ și $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{x+1} dx$.

5p a) Să se verifice că $I + J = e - 1$.

5p b) Utilizând, eventual, inegalitatea $e^x \geq x + 1$, adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$, să se arate că $J \geq \frac{1}{2}$.

5p c) Să se demonstreze că $I = \frac{e-2}{2} + \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^2} dx$.