

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + e^x$.

5p a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

5p b) Să se arate că funcția f este convexă pe \mathbb{R} .

5p c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $f'(x) - f''(x) + f(x) = e^x - 3$.

2. Pentru orice număr natural n se consideră $I_n = \int_0^1 x(1+x)^n dx$.

5p a) Să se calculeze I_1 .

5p b) Utilizând faptul că $(1+x)^n \leq (1+x)^{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $x \in [0,1]$, să se arate că $I_{2009} \geq I_{2008}$.

5p c) Folosind, eventual, identitatea $x(1+x)^n = (1+x)^{n+1} - (1+x)^n$, adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $x \in \mathbb{R}$, să se arate că $I_n = \frac{n \cdot 2^{n+1} + 1}{(n+1)(n+2)}$.