

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \ln x$.

5p a) Să se arate că $f'(x) = x(2 \ln x + 1)$, oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$.

5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x \ln x}$.

5p c) Să se demonstreze că $f(x) \geq -\frac{1}{2e}$, pentru orice $x > 0$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$.

5p a) Să se determine $\int_0^1 f(x) e^{-x} dx$.

5p b) Să se arate că $\int_0^1 f''(x) dx = 2e - 1$.

5p c) Să se calculeze $\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x} dx$.