

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 - \frac{2e^x}{x + e^x}$ .

5p a) Să se verifice că  $f'(x) = \frac{2e^x(1-x)}{(x+e^x)^2}$ , pentru orice  $x \in [0, +\infty)$ .

5p b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .

5p c) Să se arate că  $-1 \leq f(x) \leq \frac{1-e}{1+e}$ , oricare ar fi  $x \geq 0$ .

2. Pentru orice număr natural nenul  $n$  se consideră,  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx$ .

5p a) Să se calculeze  $I_1$ .

5p b) Să se arate că  $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$ .

5p c) Utilizând, eventual, inegalitatea  $\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{x+1} \leq x^n$ , adevărată pentru orice  $x \in [0, 1]$  și  $n \in \mathbb{N}^*$ , să se demonstreze că  $\frac{1}{2} \leq 2010 \cdot I_{2009} \leq 1$ .