

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x - \ln x}{x + \ln x}$.

5p a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

5p b) Să se arate că $f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{(x + \ln x)^2}$, oricare ar fi $x \in [1, +\infty)$.

5p c) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției $g : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f'(x)}{(f(x) + 1)^2}$.

2. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ și $g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

5p a) Să se verifice că $\int_0^1 f'(x) dx = \ln 2$.

5p b) Să se demonstreze că $\int g(x) dx = f(x) + C$.

5p c) Să se calculeze $\int_1^2 \frac{g(x)}{f^2(x)} dx$.