

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

5p a) Să se arate că $f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .

5p c) Știind că $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$, să se determine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) + g(x^2) + g(x^3) + \dots + g(x^{2009}) + x^{2010}}{x^{2009}}.$$

2. Se consideră $I_n = \int_e^{e^2} x \ln^n x \, dx$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

5p a) Să se calculeze I_0 .

5p b) Să se arate că $I_n \leq I_{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

5p c) Să se demonstreze că are loc relația $I_n = \frac{e^2(e^2 \cdot 2^n - 1)}{2} - \frac{n}{2} I_{n-1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.