

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ .

**5p** a) Să se determine ecuația asimptotei către  $-\infty$  la graficul funcției  $f$ .

**5p** b) Să se arate că  $f'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

**5p** c) Să se demonstreze că oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$  avem  $\frac{2}{3} \leq f(x^4) + f(x^2) \leq 2$ .

2. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - \frac{1}{x}$ .

**5p** a) Să se calculeze  $\int_1^e f(x) dx$ .

**5p** b) Să se arate că orice primitivă a funcției  $f$  este convexă pe intervalul  $(0, +\infty)$ .

**5p** c) Să se demonstreze că volumele corpurilor obținute prin rotația în jurul axei  $Ox$ , a graficelor funcțiilor  $g, h: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x)$  și  $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$  sunt egale.