

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x-1)e^x$  și  $g(x) = xe^x$ .

5p a) Să se verifice că  $f'(x) = g(x)$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

5p b) Să se determine ecuația asimptotei spre  $-\infty$  la graficul funcției  $g$ .

5p c) Dacă  $I \subset \mathbb{R}$  este un interval, să se demonstreze că funcția  $g$  este crescătoare pe  $I$  dacă și numai dacă funcția  $f$  este convexă pe  $I$ .

2. Se consideră funcțiile  $f, g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  și  $g(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ .

5p a) Să se arate că funcția  $f$  este o primitivă a funcției  $g$ .

5p b) Să se calculeze  $\int_1^e f(x) g(x) dx$ .

5p c) Să se determine numărul real  $a \in (1; +\infty)$  astfel încât  $\int_1^a f(x) dx = 2$ .