

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2 \ln x$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in [1; +\infty)$.

5p b) Să se demonstreze că $\ln \frac{2010}{2009} \leq \frac{1}{2}$.

5p c) Folosind faptul că $1 \leq x \leq x^2 \leq 2$, oricare ar fi $x \in [1, \sqrt{2}]$, să se demonstreze inegalitatea $x^2 - x \leq 2 \ln x$, pentru orice $x \in [1, \sqrt{2}]$.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ se consideră $I_n = \int_2^3 \frac{x^n}{x^2 - 1} dx$.

5p a) Să se arate că $I_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.

5p b) Să se calculeze I_1 .

5p c) Să se demonstreze că $I_{n+2} - I_n = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.