

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

5p a) Să se arate că $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2}$, pentru orice $x > 0$.

5p b) Să se demonstreze că $\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \geq f(x)$, oricare ar fi $x \in (1; +\infty)$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x f(x) f\left(\frac{1}{x}\right) \right)$.

2. Se consideră $I_n = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^n (x^2 + 1)} dx$, unde $n \in \mathbb{N}$.

5p a) Să se verifice că $I_0 + I_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$.

5p b) Utilizând identitatea $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$ adevărată pentru orice $x \neq 0$, să se determine I_1 .

5p c) Să se arate că $I_n + I_{n-2} < \frac{1}{n-1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.