

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} ax - 6, & x < 4 \\ \sqrt{x}, & x \geq 4 \end{cases}$ , unde  $a$  este parametru real.

**5p** a) Să se determine valoarea reală a lui  $a$  astfel încât funcția  $f$  să fie continuă în punctul  $x_0 = 4$ .

**5p** b) Să se calculeze  $f'(9)$ .

**5p** c) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul  $A(9,3)$ .

2. Pentru oricare  $n \in \mathbb{N}$  se consideră funcțiile  $f_n: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_0(x) = 1$  și  $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt$ .

**5p** a) Să se determine  $f_1(x)$ , unde  $x \in [0, \infty)$ .

**5p** b) Să se demonstreze că  $\int_1^e f_1(x) \cdot \ln x dx = \frac{e^2 + 1}{4}$ .

**5p** c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$ , a graficului funcției  $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f_2(x)$ ,  $x \in [0,1]$ .