

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcțiile  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$  și  $g(x) = \frac{x - 1}{e^x}$ .

5p a) Să se verifice că  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = 0$ .

5p b) Să se determine coordonatele punctului de extrem al funcției  $f$ .

5p c) Să se demonstreze că  $g(x) - f(x) \leq 1 + \frac{1}{e^2}$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ .

2. Se consideră funcțiile  $f, g : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x + 1}$  și  $g(x) = 1 + \frac{2x}{x^2 + 1}$ .

5p a) Să se verifice că  $\int_0^1 f(x) dx = \ln 2$ .

5p b) Să se calculeze  $\int_0^1 g(x) dx$ .

5p c) Să se arate că există  $x_0 \in (0; 1)$  astfel încât  $f(x_0) < g(x_0) - 2x_0$ .