

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ .

5p a) Să se calculeze  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

5p b) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1}$ .

5p c) Să se determine asimptota orizontală către  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .

2. Pentru orice număr natural nenul  $n$  se consideră  $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = x^n e^x$  și  $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ .

5p a) Să se verifice că  $\int_0^1 e^{-x} f_1(x) dx = \frac{1}{2}$ .

5p b) Să se calculeze  $I_1$ .

5p c) Să se demonstreze că  $I_n + nI_{n-1} = e$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .