

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f, h: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ și $h(x) = f^2(x)$.

5p a) Să se verifice că $h'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$, oricare ar fi $x \geq 0$.

5p b) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f .

5p c) Să se demonstreze că funcția h este crescătoare pe intervalul $[0; +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} + 1$.

5p a) Să se arate că $\int_0^1 (x+1)(x+3)f(x)dx = \frac{22}{3}$.

5p b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p c) Să se determine numărul real pozitiv k astfel încât aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=k$ să fie egală cu $k + \ln k$.