

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0(x) = \ln x$ și $f_n(x) = f'_{n-1}(x)$.

5p a) Să se determine funcția f_1 .

5p b) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f_2 .

5p c) Să se arate că $f_0(x) \leq \frac{1}{f_1(x)} - 1$, oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^{\sqrt{e-1}} f(x) dx$.

5p b) Să se demonstreze că orice primitivă a funcției f este funcție crescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.

5p c) Să se demonstreze că $\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx > \int_2^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx$.