

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcțiile  $f, h: \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x-1)(x-2)$  și  $h(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ .

5p a) Să se arate că  $h(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$ .

5p b) Să se demonstreze că funcția  $h$  este descrescătoare pe  $(-\infty; 1)$ .

5p c) Să se arate că  $(f'(x))^2 \geq f(x) \cdot f''(x)$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^{2009} + x + 1$ .

5p a) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$ , a graficului funcției  $h: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = f(x) - x^{2009} - 1$ .

5p b) Să se determine primitiva  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a funcției  $f$ , care verifică condiția  $F(0) = 1$ .

5p c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^{2010}}$ .