

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + 1}, & x \leq 0 \\ -2x + 1, & x > 0 \end{cases}$.

5p a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0 = 0$.

5p b) Să se demonstreze că funcția f este crescătoare pe intervalul $(-\infty, 0)$.

5p c) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^n}$.

5p a) Să se verifice că $\int_1^e f_1(\sqrt{x-1}) dx = 1$.

5p b) Să se determine primitiva G a funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{f_2(x)}$, care verifică relația $G(1) = \frac{13}{15}$.

5p c) Să se calculeze $\int_0^1 x \cdot f_n(x) dx$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.