

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$.

5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

5p b) Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f .

5p c) Să se demonstreze că $f(x) \geq 4$, pentru orice $x \in (1; +\infty)$.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{e^x}{e^{nx} + 1}$.

5p a) Să se calculeze $\int f_0(x) dx$, $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f_1 , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

5p c) Să se arate că $\int_0^1 f_{n+1}(x) dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.