

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

5p a) Să se verifice că  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ , pentru orice  $x > 0$ .

5p b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  în punctul  $A\left(e, \frac{1}{e}\right)$ .

5p c) Să se arate că  $\ln x \leq \frac{x}{e}$ , pentru orice  $x > 0$ .

2. Se consideră funcția  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ .

5p a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției  $f$ .

5p b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$ , a graficului funcției  $f$ .

5p c) Folosind, eventual, faptul că  $\sqrt{x} \geq x$ , pentru orice  $x \in [0, 1]$ , să se arate că  $\int_0^1 f^{2009}(x) dx \leq \frac{1}{2010}$ .