

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x$.

5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$, pentru orice $x > 0$.

5p b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1; 2)$.

5p c) Să se arate că $2\sqrt{x} \geq 2 + \ln x$, pentru orice $x > 0$.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n + (1-x)^n$.

5p a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției f_2 .

5p b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^x \cdot f_2(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

5p c) Să se arate că $\int_0^1 f_n(x) dx \geq \int_0^1 f_{n+1}(x) dx$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.