

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x - \ln x$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, +\infty)$.

5p b) Să se arate că funcția f este convexă pe $(0, +\infty)$.

5p c) Să se arate că $f(x) \geq 0$, oricare ar fi $x > 0$.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = (2 - x)^n$.

5p a) Să se determine $\int_0^2 f_1(x) dx$, unde $x \in [0, 2]$.

5p b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f_1(x) \cdot e^x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 2$.

5p c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției f_5 .