

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2 - 3\sqrt[3]{x}$.

5p a) Să se verifice că $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, pentru orice $x > 0$.

5p b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1;0)$.

5p c) Să se arate că $\frac{x+2}{3} \geq \sqrt[3]{x}$, pentru orice $x > 0$.

2. Se consideră funcția $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^1 (x+1) \cdot f(x) dx$.

5p b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

5p c) Folosind faptul că $1 \leq (x+1)^2 \leq 4$ pentru orice $x \in [0,1]$, să se arate că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției f , este un număr din intervalul $\left[\frac{\pi}{28}, \frac{\pi}{7}\right]$.